ENSET 1980 (A1 II)

DURÉE : 4 heures

Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geqslant 1$. On dit qu'un couple (f, g) d'endomorphismes de V a la propriété $\mathcal{R}$ s'il satisfait la relation $fg - gf = f$ et dans tout le problème (f_1, g_1) désignera un tel couple.

PREMIÈRE PARTIE

1° Déterminer les couples (f, g) ayant la propriété $\mathcal{R}$ dans le cas $n = 1$.

On suppose dans toute la suite de cette première partie $n = 2$.

2° Calculer la trace et le déterminant de f_1 ; reconnaître f_1^2.

3° Dans l'hypothèse $f_1 \neq 0$ comparer le noyau de f_1 et le sous-espace propre associé à la plus petite valeur propre λ de g_1 ; donner en fonction de λ l'autre valeur propre de g_1.

4° Déterminer en fonction de (f_1, g_1) l'ensemble des endomorphismes g tels que le couple (f_1, g) ait la propriété $\mathcal{R}$.

5° Déterminer de même l'ensemble des endomorphismes f tels que le couple (f, g_1) ait la propriété $\mathcal{R}$.

DEUXIÈME PARTIE

1° Exprimer $f_1^n g_1 - g_1 f_1^n$ en fonction de f_1 et de n.

2° Démontrer que V est somme directe de l'image et du noyau de f_1^n. En déduire que f_1^n induit un automorphisme de son image. Reconnaître alors l'endomorphisme f_1^n.

On suppose dans la suite de cette deuxième partie que $\dim \operatorname{Ker} f_1 = 1$.

3° Calculer $\dim \operatorname{Ker} f_1^k$ pour $k = 1, 2, \ldots, n$. Quelle relation a-t-on entre $\operatorname{Ker} f_1^k$ et $g_1(\operatorname{Ker} f_1^k)$?

4° Donner en fonction de la plus petite valeur propre λ de g_1 les autres valeurs propres de g_1.

5° Montrer qu'il existe un vecteur v dans V tel que $v, f_1(v), \ldots f_1^k(v), \ldots$ engendrent V. En déduire l'ensemble des endomorphismes g tels que (f_1, g) ait la propriété $\mathcal{R}$. On précisera la structure naturelle de cet ensemble ainsi que sa dimension.

6° Quelle est la dimension de l'espace des endomorphismes f tels que (f, g_1) ait la propriété $\mathcal{R}$?

TROISIÈME PARTIE

Dans cette dernière partie on suppose que le polynôme caractéristique de g_1 n'a pas de racines complexes non réelles.

1° Établir l'existence d'un vecteur propre commun à f_1 et g_1.

2° Existe-t-il une base de V dans laquelle les matrices de f_1 et g_1 sont simultanément triangulaires supérieures ?

3° Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\operatorname{Ker} f_1$ pour que tout endomorphisme g, tel que le couple (f_1, g) ait la propriété $\mathcal{R}$, soit diagonalisable.

4° On suppose g_1 diagonalisable. A quelle condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres de g_1 tout endomorphisme f, tel que (f, g_1) ait la propriété $\mathcal{R}$, est-il nul ?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail